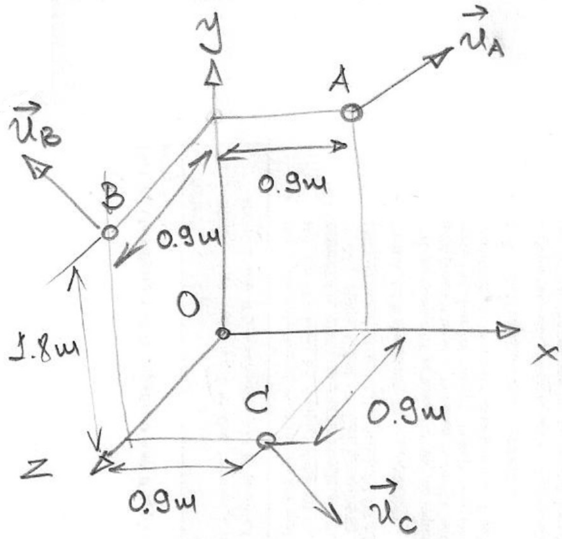
Ασκηση 1 Κεφαλαίου 3

1. Για το σύστημα των τριών υλικών σημείων, A, B, C, του σχήματος να υπολογιστούν
(α) το διανύσμα θέσης $\vec{r}$ του κέντρου μάζας του συστήματος και (β) η ορμή $m\vec{u}$, του συστήματος, ($m_A = 2\ kgr$, $m_B = 2\ kgr$, $m_C = 14\ kgr$, $\vec{u}_A = 14\vec{x}_0 + 21\vec{y}_0\ (m/s)$, $\vec{u}_B = -14\vec{x}_0 + 21\vec{y}_0\ (m/s)$, $\vec{u}_C = -3\vec{y}_0 - 2\vec{z}_0\ (m/s)$).



Διανύσματα θέσης των A, B και C:

$$\vec{r}_A = 0.9\bar{x}_0 + 1.8\bar{y}_0 + 0\bar{z}_0$$

$$\vec{r}_B = 0\bar{x}_0 + 1.8\bar{y}_0 + 0.9\bar{z}_0$$

$$\vec{r}_C = 0.9\bar{x}_0 + 0\bar{y}_0 + 0.9\bar{z}_0$$

(α) Οπότε για το κέντρο μάζας έχουμε ότι:

$$(m_A + m_B + m_C)\vec{r}_s = m_A\bar{r}_A + m_B\bar{r}_B + m_C\vec{r}_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+2+14)\bar{r}_s = 2(0.9\bar{x}_0 + 1.8\bar{y}_0 + 0\bar{z}_0) +$$
$$+ 2(0\bar{x}_0 + 1.8\bar{y}_0 + 0.9\bar{z}_0) +$$
$$+ 14(0.9\bar{x}_0 + 0\bar{y}_0 + 0.9\bar{z}_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\bar{r}_s = 1.8\bar{x}_0 + 3.6\bar{y}_0 + 3.6\bar{y}_0 + 1.8\bar{z}_0 +$$
$$+ 12.6\bar{x}_0 + 1.8\bar{z}_0 \Rightarrow 18\bar{r}_s = 14.4\bar{x}_0 + 7.2\bar{y}_0 + 3.6\bar{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \frac{14.4}{18}\bar{x}_0 + \frac{7.2}{18}\bar{y}_0 + \frac{3.6}{18}\bar{z}_0 \quad (m)$$

(β) Για την ορμή του συστήματος βρίσκω την ορμή του κάθε υλικού σημείου και τα προσθέτω διανυσματικά.

$$A: \ m_A\bar{u}_A = 2(14\bar{x}_0 + 21\bar{y}_0 + 0\bar{z}_0) = 28\bar{x}_0 + 42\bar{y}_0 + 0\bar{z}_0$$

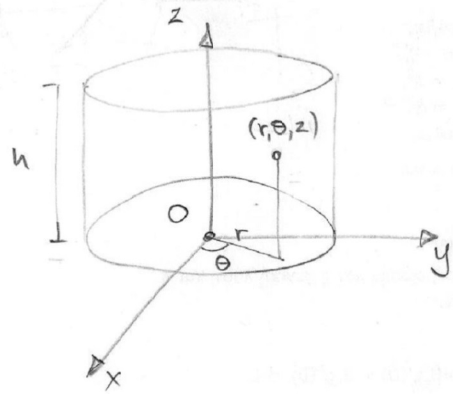
$$B: \ m_B\bar{u}_B = 2(-14\bar{x}_0 + 21\bar{y}_0 + 0\bar{z}_0) = -28\bar{x}_0 + 42\bar{y}_0 + 0\bar{z}_0$$

$$C: \ m_C\bar{u}_C = 14(0\bar{x}_0 - 3\bar{y}_0 - 2\bar{z}_0) = 0\bar{x}_0 - 42\bar{y}_0 - 28\bar{z}_0$$

$$\text{οπότε } \vec{p} = m\vec{u} = m_A\bar{u}_A + m_B\bar{u}_B + m_C\bar{u}_C = 42\bar{y}_0 - 28\bar{z}_0 \ (kgr\ m/s)$$

Ασκηση 2 Κεφαλαίου 3

2. Να υπολογιστεί η μάζα που περιέχεται στον όγκο του ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους h, αν η πυκνότητά του ρ, μεταβάλλεται ανάλογα με την απόσταση από τη βάση του. Να χρησιμοποιήσετε κυλινδρικές συντεταγμένες.



Σχήμα 38: Σχήμα άσκησης 2, κεφ III.

Η πυκνότητα δίνεται από την σχέση:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV \qquad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την (2) λαμβάνουμε:

$$m = \iiint_V \rho dV \qquad (3)$$

Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες και θέτοντας $\rho = kz$, $k =$ σταθερά, έχουμε:

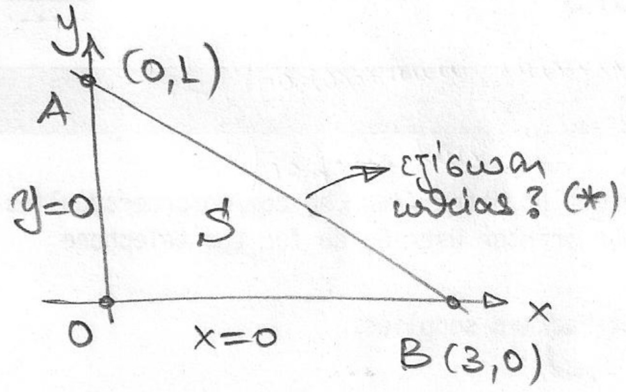
$$m = 4\iiint_V kz\, r\, dz\, dr\, d\theta = 4k\int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^h z\, r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= 4k\frac{h^2}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r\, dr\, d\theta = 2kh^2\frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = kh^2R^2\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}k\pi h^2R^2$$

Άσκηση 3 Κεφαλαίου 3

3. Να υπολογιστεί η μάζα του τριγώνου του σχήματος αν η επιφανειακή πυκνότητά του ρ_s είναι σταθερή και ίση με $1\ kgr/m^2$.



(*) Θα είναι της μορφής

$y = \alpha x + \beta$, οπότε

$y = -\frac{1}{3}x + 1$ γιατί περνάει από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(3,0)$.

Η επιφανειακή πυκνότητα της επιφάνειας S είναι ίση με:

$$\rho = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \rho\, dS \qquad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) λαμβάνουμε ότι η μάζα της επιφάνειας S είναι:

$$m = \iint_S \rho_s\, dS \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες, με $\rho_s = 1\ kgr/m^2$ έχουμε:

$$m = \iint_S 1\, dx\,dy = \int_0^3 \int_{y=0}^{y=-\frac{x}{3}+1} 1\, dy\,dx =$$

$$= \int_0^3 \left[y \right]_0^{-\frac{x}{3}+1} dx = \int_0^3 \left(-\frac{x}{3} + 1 - 0 \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3} \right) dx = \int_0^3 dx - \frac{1}{3}\int_0^3 x\,dx = x \Big|_0^3 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 =$$

$$= (3-0) - \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2} - 0 \right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

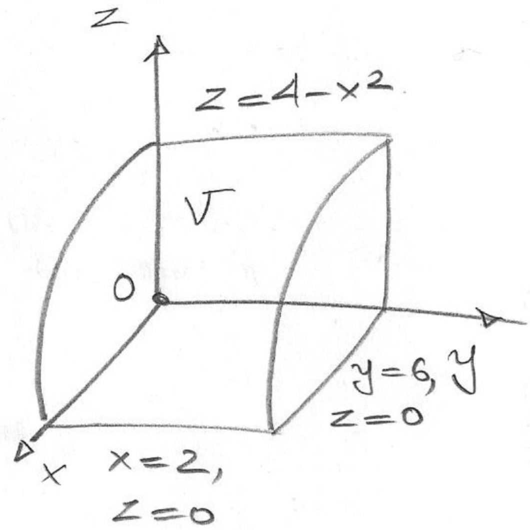
Άσκηση 4 Φυλλαδίου 3

4. Μάζα περιέχεται στον όγκο που περικλείεται από τον παραβολικό κύλινδρο $z = 4 - x^2$ και τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$ και $z = 0$. Η πυκνότητα ρ είναι σταθερή. Να βρεθεί η συντεταγμένη του κέντρου μάζας ως προς τον άξονα x.

Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα, $\vec{r}_s$, του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση

$$\vec{r}_s = \frac{\iiint_V \vec{r}\rho\, dV}{\iiint_V \rho\, dV},$$

όπου τώρα



το σύστημα είναι ομογενές (δηλ. ρ = σταθερά)

ισχύει ότι:

$$\vec{r}_s = \frac{\cancel{\rho}\iiint_V \vec{r}\, dV}{\cancel{\rho}\iiint_V dV} \quad (1)$$

Το διάνυσμα θέσης σε καρτεσιανές του κέντρου μάζας είναι: $\vec{r}_s = x_s\bar{x}_0 + y_s\bar{y}_0 + z_s\bar{z}_0$

και το διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε υλικού σημείου: $\vec{r} = x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0 + z\bar{z}_0$

η (1) γίνεται:

$$x_s\bar{x}_0 + y_s\bar{y}_0 + z_s\bar{z}_0 = \frac{\left(\int_V x\, dV\right)\bar{x}_0 + \left(\int_V y\, dV\right)\bar{y}_0 + \left(\int_V z\, dV\right)\bar{z}_0}{\int_V dV} \quad (3)$$

Από την (3) προκύπτει:

$$x_s = \frac{\iiint_V x\, dV}{\iiint_V dV = V} \quad (4)$$

Σε καρτεσιανές:

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} dz\,dy\,dx = 32 \quad (5)$$

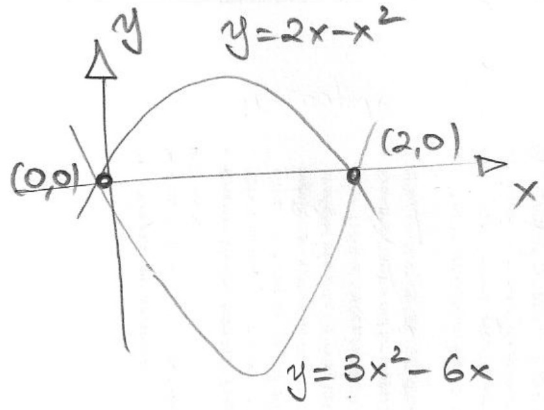
και

$$\iiint_V x\, dV = \int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} x\, dz\,dy\,dx = 24 \quad (6)$$

$$(4) \overset{(5)}{\underset{(6)}{\Longrightarrow}} x_s = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

Άσκηση 5 Κεφαλαίου 3

5. Μάζα βρίσκεται στην επιφάνεια που περικλείεται από τις παραβολές $y = 2x - x^2$ και $y = 3x^2 - 6x$. Η επιφανειακή πυκνότητα ρ_s είναι σταθερή. Να βρεθεί το κέντρο μάζας.



Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα, $\bar{r}_s$, του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}_s = \frac{\iint_S \vec{r}\, dS}{S} \quad , \quad (1)$$

Όταν το συνεχές σύστημα είναι επιφάνεια κι ομογενής (ρ_s=σταθ)

Επειδή:

$$\bar{r}_s = x_s \bar{x}_0 + y_s \bar{y}_0 \quad \text{και} \quad \vec{r} = x \bar{x}_0 + y \bar{y}_0 \quad , \quad (2)$$

η (1) γίνεται: $$x_s \bar{x}_0 + y_s \bar{y}_0 = \frac{\left(\iint_S x\, dS\right) \bar{x}_0 + \left(\iint_S y\, dS\right) \bar{y}_0}{S} \quad , \quad (3)$$

Από την (3) λαμβάνουμε:

$$x_s = \frac{\iint_S x\, dS}{S} \quad , \quad y_s = \frac{\iint_S y\, dS}{S} \quad , \quad (4)$$

$$S = \iint_S dx\, dy = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\, dx = \int_0^2 (8x - 4x^2)\, dx = \frac{16}{3} , \quad (5)$$

$$\iint_S x\, dS = \iint_S x\, dy\, dx = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\, dx = \frac{16}{3} , \quad (6)$$

$$\iint_S y\, dS = \iint_S y\, dy\, dx = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x^2) \right] dx = -\frac{64}{15} , \quad (7)$$

Από τις (5), (6), (7) και (4) λαμβάνουμε: $x_s = 1$, $y_s = -\frac{4}{5}$.

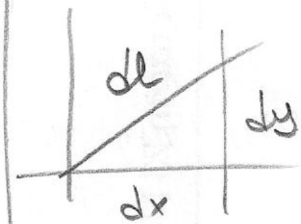
Δηλαδή: $\bar{r}_s = 1\, \bar{x}_0 - \frac{4}{5} \bar{y}_0$.

Ασκηση 6 Κεφαλαίου 3

6. Μάζα βρίσκεται στην καμπύλη $y = 2x$. Να βρεθεί το διανύσμα θέσης $\vec{r}$, του κέντρου μάζας όταν η γραμμική πυκνότητα ρ_l είναι σταθερή.

(από το 0 έως το 2) παραμετρικα

$\rho_l =$ σταθερή



$$dl^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Για να βρεθεί το $\bar{r}_s = x_s \bar{x}_0 + y_s \bar{y}_0 =$

$$= \frac{\int_0^2 x\, dl}{\int_0^2 dl}\bar{x}_0 + \frac{\int_0^2 y\, dl}{\int_0^2 dl}\bar{y}_0 =$$

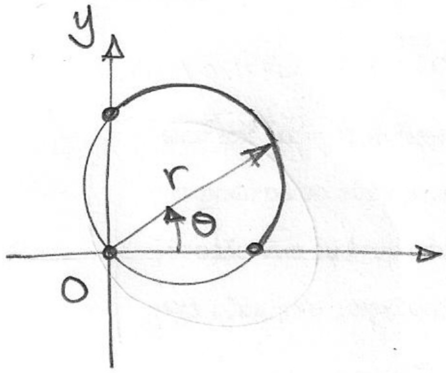
$$= \frac{\int_0^2 x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}\bar{x}_0 + \frac{\int_0^2 \overset{2x}{\overset{\|}{y}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}\bar{y}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_s &= \frac{\int_0^2 x\sqrt{1+2^2}dx}{\int_0^2 \sqrt{1+2^2}dx} = \frac{\cancel{\sqrt{5}}\int_0^2 x\,dx}{\cancel{\sqrt{5}}\int_0^2 dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2}{\left[x\right]_0^2} \\ y_s &= \frac{2\int_0^2 x\sqrt{1+2^2}dx}{\int_0^2 \sqrt{1+2^2}dx} = \frac{2\cancel{\sqrt{5}}\int_0^2 x\,dx}{\cancel{\sqrt{5}}\int_0^2 dx} = \frac{2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2}{\left[x\right]_0^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_s &= 1 \\ y_s &= 2 \end{aligned} \right. , \quad \vec{r}_s = 1\,\bar{x}_0 + 2\,\bar{y}_0$$

Άσκηση 7 Κεφαλαίου 3

7. Βρείτε το κέντρο μάζας της καμπύλης, η οποία είναι το τόξο του κύκλου, $r = 2\sin\theta + 4\cos\theta$ από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi/2$, όταν η γραμμική πυκνότητα είναι σταθερή.



Το διάνυσμα θέσης, $\vec{r}_s$, του κέντρου μάζας δίνεται από:

$$\vec{r}_s = \frac{\int_\ell \vec{r}\, d\ell}{\ell}, \quad (1)$$

όταν το συνεχές σύστημα είναι καμπύλη και ομογενές.

Επειδή, $\vec{r}_s = x_s \bar{x}_0 + y_s \bar{y}_0$ και $\vec{r} = x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0$ (2)

η (1) γίνεται: $x_s \bar{x}_0 + y_s \bar{y}_0 = \dfrac{\int_\ell x\, d\ell\, \bar{x}_0 + \int_\ell y\, d\ell\, \bar{y}_0}{\ell}$ (3)

από (3) λαμβάνουμε: $x_s = \dfrac{\int_\ell x\, d\ell}{\ell}$ & $y_s = \dfrac{\int_\ell y\, d\ell}{\ell}$ (4)

Αλλά, $\ell = \int_\ell d\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{20}\, d\theta = \sqrt{5}\,\pi \quad (5)$$

$$\int_\ell x\, d\ell = \int_0^{\pi/2} x\left(\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta =$$

$$= 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta)\, d\theta = 2\sqrt{5}\,(\pi + 1) \quad (6)$$

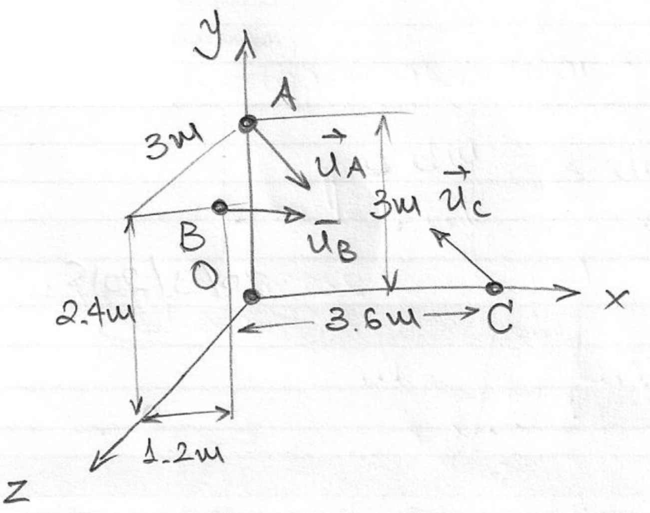
$$\int_\ell y\, d\ell = \int_0^{\pi/2} (r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right) \quad (7)$$

$$(4) \underset{(6),(7)}{\overset{(5)}{\Longrightarrow}} \quad x_s = \frac{2(\pi+1)}{\pi}, \quad y_s = \frac{\pi + 4}{\pi}.$$

Άσκηση 8 Κεφαλαίου 3

8. Για το σύστημα των τριών υλικών σημείων, A, B, C, του σχήματος να υπολογιστούν (α) το διανύσμα θέσης $\vec{r}$, του κέντρου μάζας του συστήματος και (β) η ορμή $m\vec{u}$, του συστήματος, ($m_A = 3\ kgr$, $m_B = 2\ kgr$, $m_C = 4\ kgr$, $\vec{u}_A = 4\vec{x}_0 + 2\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0\ (m/s)$, $\vec{u}_B = 4\vec{x}_0 + 3\vec{y}_0\ (m/s)$, $\vec{u}_C = -2\vec{x}_0 + 4\vec{y}_0 + 2\vec{z}_0\ (m/s)$).



Διανύσματα θέσης των A, B και C:

$$\vec{r}_A = 0\,\overline{x_0} + 3\,\overline{y_0} + 0\,\overline{z_0}\ (m)$$

$$\vec{r}_B = 1.2\,\overline{x_0} + 2.4\,\overline{y_0} + 3\,\overline{z_0}\ (m)$$

$$\vec{r}_C = 3.6\,\overline{x_0} + 0\,\overline{y_0} + 0\,\overline{z_0}\ (m)$$

α) Οπότε για το κέντρο μάζας έχουμε ότι:

$$(m_A + m_B + m_C)\,\vec{r}_s = m_A\overline{r_A} + m_B\overline{r_B} + m_C\overline{r_C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\,\vec{r}_s = 3\,(3\overline{y_0}) + 2\,(1.2\overline{x_0} + 2.4\overline{y_0} + 3\overline{z_0}) + $$

$$+ 4\,(3.6\,\overline{x_0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\,\vec{r}_s = 9\,\overline{y_0} + 2.4\,\overline{x_0} + 4.8\,\overline{y_0} + 6\,\overline{z_0} + 14.4\,\overline{x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\,\vec{r}_s = 16.8\,\overline{x_0} + 13.8\,\overline{y_0} + 6\,\overline{z_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_s = \frac{16.8}{9}\,\overline{x_0} + \frac{13.8}{9}\,\overline{y_0} + \frac{6}{9}\,\overline{z_0}\ (m)$$

β) Για την ορμή του συστήματος βρίσκω την ορμή του κάθε υλικού σημείου και τα προσθέτω διανυσματικά.

$$A:\ m_A\overline{u_A} = 12\,\overline{x_0} + 6\,\overline{y_0} + 6\,\overline{z_0}$$

$$B:\ m_B\overline{u_B} = 8\,\overline{x_0} + 6\,\overline{y_0}$$

$$C:\ m_C\overline{u_C} = -8\,\overline{x_0} + 16\,\overline{y_0} + 8\,\overline{z_0}$$

Οπότε $m\vec{u} = m_A\vec{u}_A + m_B\vec{u}_B + m_C\vec{u}_C = 12\,\overline{x_0} + 28\,\overline{y_0} + 14\,\overline{z_0}\ (kgr\ m/s)$

Άσκηση 9 Κεφαλαίου 3

9. Το σύστημα των δύο μαζών $m_1 = 1\ kgr$ και $m_2 = 3\ kgr$ έχουν διανύσματα θέσης $\vec{r}_1 = 5t\vec{x}_0 + 3t\vec{y}_0 + 7t\vec{z}_0$ και $\vec{r}_2 = 2t\vec{x}_0 + 5t\vec{y}_0 + 3t\vec{z}_0$ αντίστοιχα. Να βρεθούν η ταχύτητα και η ορμή του κέντρου μάζας του συστήματος.

Η ορμή του συστήματος θα είναι:

$$(m_1 + m_2)\vec{u}_s = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2$$

άρα χρειάζεται να υπολογίσω τις $\bar{u}_1$ και $\bar{u}_2$

$$\bar{u}_1 = \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5t\bar{x}_0 + 3t\bar{y}_0 + 7t\bar{z}_0\right) =$$

$$= 5\bar{x}_0 + 3\bar{y}_0 + 7\bar{z}_0$$

$$\bar{u}_2 = \frac{d\bar{r}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t\bar{x}_0 + 5t\bar{y}_0 + 3t\bar{z}_0\right) =$$

$$= 2\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0 + 3\bar{z}_0$$

επομένως η ορμή του συστήματος είναι:

$$\vec{P}_s = M_s\vec{u}_s = 1\left(5\bar{x}_0 + 3\bar{y}_0 + 7\bar{z}_0\right) + 3\left(2\bar{x}_0 + 5\bar{y}_0 + 3\bar{z}_0\right) =$$

$$= 5\bar{x}_0 + 3\bar{y}_0 + 7\bar{z}_0 + 6\bar{x}_0 + 15\bar{y}_0 + 9\bar{z}_0 =$$

$$= 11\bar{x}_0 + 18\bar{y}_0 + 16\bar{z}_0$$

Η ταχύτητα του συστήματος θα είναι:

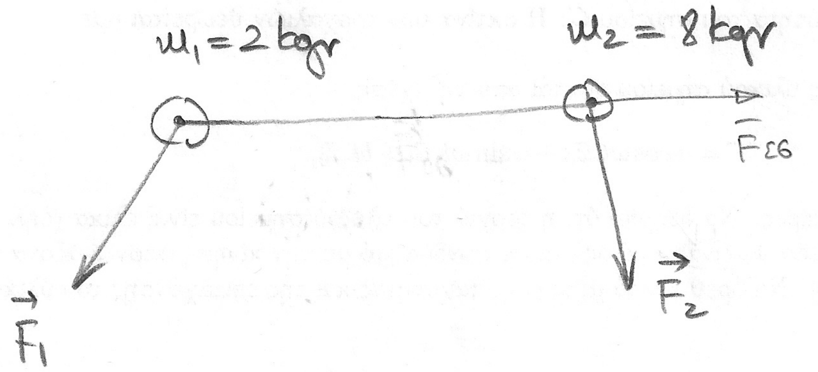
$$M\vec{u}_s = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_s = \frac{m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_s = \frac{11\bar{x}_0 + 18\bar{y}_0 + 16\bar{z}_0}{4} \Rightarrow \vec{u}_s = \frac{11}{4}\bar{x}_0 + \frac{18}{4}\bar{y}_0 + \frac{16}{4}\bar{z}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u}_s = \frac{11}{4}\bar{x}_0 + \frac{9}{2}\bar{y}_0 + 4\bar{z}_0$$

Άσκηση 10 Κεφαλαίου 3

10. Οι μάζες, $m_1 = 2\ kgr$ και $m_2 = 8\ kgr$ του σχήματος αποτελούν ένα σύστημα υλικών σημείων και πάνω τους ασκούνται οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_1 = 2t\vec{x}_0 - t\vec{y}_0 - 5t\vec{z}_0$ και $\vec{F}_2 = t\vec{x}_0 + 2t\vec{y}_0 - 8t\vec{z}_0$. (α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος. (β) Να βρεθεί η επιτάχυνση της μάζας m_2, όταν η εσωτερική δύναμη που ασκεί η m_1 στην m_2 είναι $\vec{F}_{es} = -2t^2\vec{y}_0$.



(α) Από νόμο Νεύτωνα για το σύστημα έχουμε ότι:

$$M \underbrace{\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}}_{\vec{\alpha}_s} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} F_i}_{\substack{\text{συνισταμ.}\\ \text{εξωτερ.}\\ \text{δυνάμεων}}} \overset{\text{για το σύστημα}}{\Rightarrow} (m_1+m_2)\vec{\alpha}_s = \underbrace{\vec{F}_1+\vec{F}_2}_{\substack{\text{εξωτερικές}\\ \text{δυνάμεις}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_s = \frac{\vec{F}_1+\vec{F}_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{10}\left(2t\bar{x}_0 - t\bar{y}_0 - 5t\bar{z}_0 + t\bar{x}_0 + 2t\bar{y}_0 - 8t\bar{z}_0\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(3t\bar{x}_0 + t\bar{y}_0 - 13t\bar{z}_0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_s = \frac{3t}{10}\bar{x}_0 + \frac{t}{10}\bar{y}_0 - \frac{13t}{10}\bar{z}_0$$

(β) $$m_i\vec{\alpha}_i = \underbrace{\vec{F}_i}_{\substack{\text{άθροισμα}\\ \text{εξωτερικών}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} F_{ij}}_{\substack{\text{άθροισμα}\\ \text{εσωτερικών}}} \Rightarrow m_2\vec{\alpha}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow$$

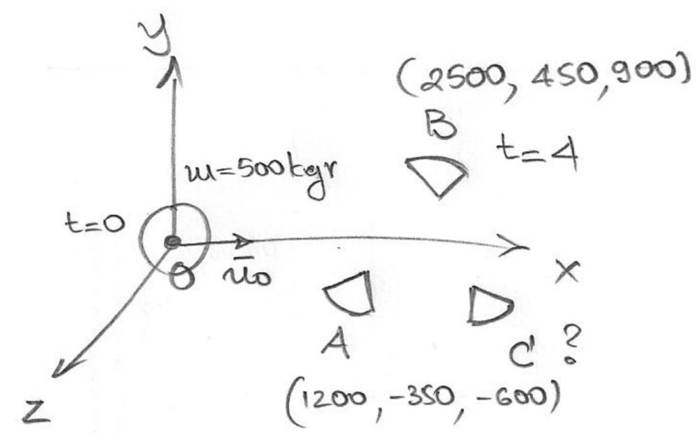
$$\Rightarrow \vec{\alpha}_2 = \frac{1}{m_2}\left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{\varepsilon\sigma}\right) =$$

$$\frac{1}{8}\left(t\bar{x}_0 + 2t\bar{y}_0 - 8t\bar{z}_0 - 2t^2\bar{y}_0\right) = \frac{1}{8}\left(t\bar{x}_0 + 2(t-t^2)\bar{y}_0 - 8t\bar{z}_0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}_2 = \frac{t}{8}\bar{x}_0 + \frac{t-t^2}{4}\bar{y}_0 - t\bar{z}_0$$

Άσκηση 11 Κεφαλαίου 3

11. Διαστημικό όχημα μάζας 500 kgr ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα $\vec{u}_0 = 450\vec{x}_0 (m/s)$ και περνά από την αρχή των αξόνων O, όταν $t = 0$. Έκρηξη του οχήματος το διαχωρίζει σε τρία κομμάτια, A, B, C με μάζες 300, 150, 50 kgr αντίστοιχα. Οι θέσεις των μαζών A, B κατά τη χρονική στιγμή $t = 4$, είναι $A(1200\ m,\ -350\ m,\ -600\ m)$ και $B(2500\ m,\ 450\ m,\ 900\ m)$. Να υπολογιστεί η θέση του C την ίδια χρονική στιγμή. Οι εξωτερικές δυνάμεις πάνω στο σύστημα να θεωρηθούν αμελητέες.



Δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα (κλειστό σύστημα), οπότε η ορμή του διατηρείται σταθερή δηλ.

$$m_s \frac{d^2 \bar{r}_s}{dt^2} = \bar{0} \Rightarrow \bar{P}_s = \text{σταθερή}.$$

Τότε το κέντρο μάζας του συστήματος είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ή παραμένει ακίνητο, δηλαδή:

$$\bar{P}_s = m_s \bar{u}_s = \text{σταθ.} \quad \text{και} \quad \bar{r}_s = \bar{u}_s t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{r}_s = (450 \bar{x}_0\ m/s)\ 4sec = 1800 \bar{x}_0\ (m), \quad (1)$$

Επίσης: $m_s \bar{r}_s = m_A \bar{r}_A + m_B \bar{r}_B + m_C \bar{r}_C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{r}_C = \frac{m_s \bar{r}_s - (m_A \bar{r}_A + m_B \bar{r}_B)}{m_C}, \quad (2)$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow$

$$\bar{r}_C = \frac{(500\ kgr)(1800\ \bar{x}_0)}{(50\ kgr)} - \left[\frac{(300\ kgr)}{(50\ kgr)} (1200\ \bar{x}_0 - 350\ \bar{y}_0 - 600\ \bar{z}_0) + \frac{(150\ kgr)}{(50\ kgr)} (2500\ \bar{x}_0 + 450\ \bar{y}_0 + 900\ \bar{z}_0) \right] =$$

$$= 3300\ \bar{x}_0 + 750\ \bar{y}_0 + 900\ \bar{z}_0\ (m).$$

Άσκηση 12 Κεφαλαίου 3

12. Σύστημα υλικών σημείων αποτελείται από τις μάζες $m_1 = 2\ kgr$, $m_2 = 1\ kgr$, $m_3 = 1.5\ kgr$ και $m_4 = 0.5\ kgr$. Τα διανύσματα θέσης των μαζών είναι $\vec{r}_1 = \vec{x}_0 + \vec{y}_0 + \vec{z}_0$, $\vec{r}_2 = 4\vec{y}_0 + 3\vec{z}_0$, $\vec{r}_3 = 2\vec{x}_0 + 2\vec{z}_0$ και $\vec{r}_4 = 4\vec{z}_0$ αντίστοιχα. Οι ταχύτητες των μαζών είναι αντίστοιχα $\vec{u}_1 = 7\vec{x}_0$, $\vec{u}_2 = -6\vec{y}_0$, $\vec{u}_3 = -3\vec{x}_0$ και $\vec{u}_4 = 12\vec{x}_0 + 5\vec{z}_0$. Να υπολογιστούν η ορμή και η στροφορμή του συστήματος των υλικών σημείων.

Η ορμή του συστήματος: $\vec{P} = \sum_{i=1}^{4} m_i \vec{u}_i = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 + m_3\bar{u}_3 + m_4\bar{u}_4 =$

$$= 2(7\bar{x}_0) + 1(-6\bar{y}_0) + 1.5(-3\bar{x}_0) + 0.5(12\bar{x}_0 + 5\bar{z}_0) =$$

$$= 14\bar{x}_0 - 6\bar{y}_0 - 4.5\bar{x}_0 + 6\bar{x}_0 + 2.5\bar{z}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = 15.5\,\bar{x}_0 - 6\bar{y}_0 + 2.5\bar{z}_0}$$

Η στροφορμή του συστήματος: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{4} m_i (\vec{r}_i \times \vec{u}_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{4} (\vec{r}_i \times m\vec{u}_i) = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 14 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4.5 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 2.5 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L} = 18\bar{x}_0 + 29\bar{y}_0 - 14\bar{z}_0.$$